ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

SOULADDA PONGPANYA

MỘT SỐ TÍNH CHẤT VỀ NGHIỆM CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH NAVIER - STOKES KHÔNG THUẦN NHẤT TRONG $\mathbb{R}^n$

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2020

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

SOULADDA PONGPANYA

MỘT SỐ TÍNH CHẤT VỀ NGHIỆM CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH NAVIER - STOKES KHÔNG THUẦN NHẤT TRONG $\mathbb{R}^n$

Ngành: Toán Giải tích
Mã số: 8460102

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Cán bộ hướng dẫn khoa học: TS. Phạm Thị Thủy

THÁI NGUYÊN - 2020

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan rằng nội dung trình bày trong luận văn này là trung thực và không trùng lặp với đề tài khác. Tôi cũng xin cam đoan rằng mọi sự giúp đỡ cho việc thực hiện luận văn này đã được cảm ơn và các thông tin trích dẫn trong luận văn đã được chỉ rõ nguồn gốc.

Thái Nguyên, tháng 11 năm 2020

Người viết luận văn

Souladda PONGPANYA

LỜI CẢM ƠN

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn của TS. Phạm Thị Thủy. Do đây là những kiến thức khá mới mẻ và khoảng thời gian nghiên cứu còn hạn chế nên luận văn không tránh khỏi những sai sót. Tôi rất mong nhận được những ý kiến đóng góp của quý thầy cô và mọi người để luận văn được hoàn thiện hơn.

Tôi cũng xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới TS. Phạm Thị Thủy đã trực tiếp giao đề tài, hướng dẫn và giúp đỡ tận tình trong suốt quá trình nghiên cứu và hoàn thành luận văn. Tôi xin chân thành cảm ơn Ban chủ nhiệm khoa Toán cùng các quý thầy cô đã quan tâm, nhiệt tình giảng dạy trong suốt khóa học. Tôi cũng xin cảm ơn gia đình, bạn bè đã giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập và hoàn thành luận văn.

Trân trọng cảm ơn!

Thái Nguyên, tháng 11 năm 2020

Người viết luận văn

Souladda PONGPANYA

MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU

Việc nghiên cứu phương trình Navier – Stokes đã được đặt ra từ khá sớm ở đầu thế kỳ XIX và lần đầu tiên được Claude – Louis Navier thiết lập vào năm 1821 cho các chất lỏng không nén được và năm 1822 cho các chất lỏng nhớt. Nhưng Navier đi đến phương trình Navier – Stokes mà chưa hoàn toàn nhận thức rõ tầm quan trọng của các yếu tố xuất hiện trong phương trình. Cho đến nay đã có rất nhiều công trình nghiên cứu về loại phương trình Navier – Stokes. Tuy nhiên, vấn đề tồn tại nghiệm mạnh toàn cục và tính duy nhất của nghiệm yếu trong trường hợp ba chiều vẫn là thách thức lớn. Vì nhu cầu của Khoa học và Công nghệ mà việc nghiên cứu hệ Navier-Stokes nói riêng và các phương trình, hệ phương trình trong cơ học chất lỏng nói chung ngày càng trở nên thời sự và cấp thiết. Như được đề cập đến trong các cuốn chuyên khảo của R.Temam [16], J. Frehse & M. Růžička [6], [7], [8], [9], G. P. Galdi [11], [12] và các bài báo tổng quan gần đây của C. Bardos & B. Nicolaenko [14] và R. Farwig, Darmstadt & H. Sohr, Paderborn [10] những vấn đề cơ bản đặt ra khi nghiên cứu các phương trình và hệ phương trình trong cơ học chất lỏng là: Sự tồn tại, tính duy nhất và tính chính quy của nghiệm. Tính chính quy ở đây có thể là tính chính quy theo biến thời gian hoặc tính chính quy theo biến không gian.

Mục đích của luận văn “ Một số tính chất về nghiệm của hệ phương trình Navier-Stokes không thuần nhất trong $\mathbb{R}^n$ ” là trình bày một số kết quả nghiên cứu về nghiệm của hệ phương trình Navier – Stokes không thuần nhất.

Các kết quả nghiên cứu được trình bày trong phạm vi của 34 trang, trong đó gồm phần mở đầu, hai chương nội dung, phần kết luận và danh mục các tài liệu tham khảo.

Chương 1: Trình bày một số kiến thức chuẩn bị của các không gian hàm: không gian các hàm trơn, không gian các hàm suy rộng, không gian Sobolev và hệ phương trình Navier – Stokes.

Chương 2: Là nội dung chính của luận văn. Trình bày định nghĩa nghiệm yếu, sự tồn tại, tính duy nhất, tính chính quy về nghiệm của hệ phương trình Navier-Stokes không thuần nhất trong $\mathbb{R}^n$.

Chương 1
KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Trong Chương 1 trình bày lại một số kiến thức cơ sở làm nền tảng để nghiên cứu Chương 2. Các tài liệu tham khảo được trích dẫn trong [1], [2], [3], [5], [15].

1.1. Không gian hàm

1.1.1. Không gian hàm trơn

Định nghĩa 1.1.1. *Giả sử* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *là một miền với* $n \geq 1$. *Nếu* $n = 1$, $\Omega = (a,b)$ *là một khoảng mở với* $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

Giả sử $k \in \mathbb{N}$, *ta kí hiệu* $C^k(\Omega)$ *là không gian của tất cả các hàm*

$$\begin{aligned} u: \quad \Omega &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto u(x) \end{aligned}$$

sao cho $D^\alpha u$ *tồn tại và liên tục trong* Ω *với mọi* $\alpha \in \mathbb{N}_0^n, 0 \leq |\alpha| \leq k$.

$C^0(\Omega)$ là không gian của tất cả các hàm $u: \quad \Omega \to \mathbb{R}$.

$C^\infty(\Omega) := \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\Omega)$ gọi là không gian hàm trơn trong Ω.

Giả sử $\overline{M}$ là bao đóng của tập $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Ta kí hiệu $supp \ u := \overline{\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}}$ là giá của hàm $u: \quad \Omega \to \mathbb{R}$.

Nếu $k \in \mathbb{N}_0$ hoặc $k = \infty$ thì ta đặt

$$C_0^k(\Omega) := \left\{ u \in C^k(\Omega); supp \ u \ compact, supp \ u \subseteq \Omega \right\}.$$

Do đó $u \in C_0^k(\Omega)$ nghĩa là $u \in C^k(\Omega)$ và $u = 0$ trong Ω ngoại trừ một tập con compact nào đó của Ω. Đặc biệt $C_0^k(\Omega)$ là không gian của tất cả các hàm trơn u bằng không ngoại trừ một tập con compact nào đó phụ thuộc vào *u*.

Giả sử $u|_M$ là hạn chế của hàm u trên tập con *M*. Với $k \in \mathbb{N}_0$ hoặc $k = \infty$, ta kí hiệu $C^k(\overline{\Omega})$ là không gian của tất cả các hạn chế $u|_{\overline{\Omega}}$ với $u \in C^k(\mathbb{R}^n)$ sao cho

$$\sup_{|\alpha| \leq k, x \in \mathbb{R}^n} \left| D^\alpha u(x) \right| < \infty.$$

Nếu $k=\infty$ thì ta thay $|\alpha|\le k$ bởi $|\alpha|<\infty.$

Ta xác định chuẩn

$$\|u\|_{C^k}=\|u\|_{C^k(\overline{\Omega})}:=\sup_{|\alpha|\le k,x\in\overline{\Omega}}\left|D^\alpha u(x)\right|.$$

Nếu $k=\infty$ thì ta thay $|\alpha|\le k$ bởi $|\alpha|<\infty.$

Ta ký hiệu

$$C_{loc}^k\left(\overline{\Omega}\right):=\left\{u|_{\overline{\Omega}};u\in C^k\left(\mathbb{R}^n\right)\right\}.$$

Giả sử $n\ge 2, 0<T\le\infty.$ Ta xác định không gian của trường vectơ không phân kỳ trơn

$$C_{0,\sigma}^\infty(\Omega):=\left\{u\in C_0^\infty(\Omega)^n;div\ u=0\right\}.$$

Ta xét không gian thử

$$C_0^\infty\left((0,T);C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)\right):=\left\{u\in C_0^\infty\left((0,T)\times\Omega\right)^n;div\ u=0\right\},$$

trong đó *div* áp dụng cho các biến số $x=(x_1,...,x_n)\in\Omega$ và

$$C_0^\infty\left([0,T);C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)\right):=\left\{u|_{[0,T)\times\Omega};u\in C_0^\infty\left((-1,T)\times\Omega\right)^n;div\ u=0\right\}.$$

1.1.2. Không gian hàm suy rộng

Giả sử $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ là một miền bất kỳ với $n\ge 1.$

Trong lý thuyết hàm suy rộng, không gian tuyến tính $C_0^\infty(\Omega)$ của hàm trơn trên Ω gọi là không gian thử và $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$ gọi là hàm thử. Cho phiếm hàm tuyến tính

$$F:\quad \varphi\to F(\varphi),\ \varphi\in C_0^\infty(\Omega).$$

Hàm *F* liên tục khi và chỉ khi với mỗi miền con $G\subseteq\Omega,\ \overline{G}\subseteq\Omega,$ tồn tại $k\in\mathbb{N}_0$ và $C=C(F,G)>0$ sao cho

$$\left|F(\varphi)\right|\le C\|\varphi\|_{C^k(\overline{G})}$$

thỏa mãn với mọi $\varphi\in C_0^\infty(\Omega).$

Định nghĩa 1.1.2. *Không gian tuyến tính* $C_0^\infty(\Omega)'$ *của tất cả các phiếm hàm tuyến tính*

$$F:C_0^\infty(\Omega)\to\mathbb{R}$$
$$\varphi\mapsto F(\varphi)\quad,\quad\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$$

liên tục, được gọi là không gian hàm suy rộng trong Ω. Kí hiệu

$$F(\varphi)=[F,\varphi]=[F,\varphi]_\Omega$$

là giá trị của F tại φ.

Mỗi hàm $f\in L^1_{loc}(\Omega)$ xác định một hàm suy rộng được định nghĩa bởi

$$\varphi\mapsto\langle f,\varphi\rangle_\Omega=\langle f,\varphi\rangle:=\int_\Omega f\varphi dx.$$

Ta kí hiệu hàm suy rộng là $\langle f,.\rangle=\langle f,.\rangle_\Omega$ hoặc f. Do đó ta xác định f với hàm suy rộng $\langle f,.\rangle$ và phép nhúng

$$L^1_{loc}(\Omega)\subseteq C_0^\infty(\Omega)'.$$

Mỗi $f\in L^1_{loc}(\Omega)$ gọi là một hàm suy rộng chính quy.

Xét toán tử vi phân bất kỳ $D^\alpha=D_1^{\alpha_1}...D_n^{\alpha_n}$ với $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)\in\mathbb{N}_0^n.$ Với mỗi $F\in C_0^\infty(\Omega)'$ hàm suy rộng $D^\alpha F\in C_0^\infty(\Omega)'$ được định nghĩa bởi

$$\left[D^\alpha F,\varphi\right]:=(-1)^{|\alpha|}\left[F,D^\alpha\varphi\right],\quad \varphi\in C_0^\infty(\Omega).$$

Đặc biệt, với mỗi $f\in L^1_{loc}(\Omega)$ hàm suy rộng $D^\alpha f=\left[D^\alpha f,.\right]\in C_0^\infty(\Omega)'$ được định nghĩa bởi

$$\left[D^\alpha f,\varphi\right]:=(-1)^{|\alpha|}\left\langle f,D^\alpha\varphi\right\rangle=(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega f\left(D^\alpha\varphi\right)dx.$$

Nếu $D^\alpha f$ chính quy thì tồn tại một hàm của $L^1_{loc}(\Omega)$ biểu thị qua $D^\alpha f$ sao cho

$$\left[D^\alpha f,\varphi\right]=\left\langle D^\alpha f,\varphi\right\rangle=\int_\Omega\left(D^\alpha f\right)\varphi dx \text{ với mọi } \varphi\in C_0^\infty(\Omega).$$

Kí hiệu $D^\alpha f\in L^1_{loc}(\Omega)$ là $D^\alpha f$ chính quy và coi như một hàm trong $L^1_{loc}(\Omega)$.

Giả sử $F\in C_0^\infty(\Omega)'$ và

$$D:=\sum_{|\alpha|\le k}a_\alpha D^\alpha,\ \ k\in\mathbb{N}_0, a_\alpha\in\mathbb{R} \tag{1.1}$$

là toán tử vi phân bất kỳ. $DF\in C_0^\infty(\Omega)'$ được định nghĩa bởi

$$[DF,\varphi]=\sum_{|\alpha|\le k}(-1)^{|\alpha|}a_\alpha\left[F,D_\alpha\varphi\right],\quad \varphi\in C_0^\infty(\Omega). \tag{1.2}$$

Đặc biệt, nếu $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ và Df được định nghĩa bởi (1.2) là hàm suy rộng chính quy xác định bởi một hàm được biểu thị qua Df thì ta viết đơn giản $Df \in L^1_{loc}(\Omega)$. Khi đó

$$[Df,\varphi] = \langle Df,\varphi\rangle = \int_\Omega (Df)\varphi dx = \sum_{|\alpha|\le k} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha \langle f, D^\alpha \varphi\rangle \text{ với mọi } \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Giả sử $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ và $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$. Nếu $D^\alpha f$ chính quy, $D^\alpha f \in L^1_{loc}(\Omega)$ thì ta gọi $D^\alpha f$ là đạo hàm yếu cấp α của f. Nếu $1 \le q \le \infty$ thì ký hiệu $D^\alpha f \in L^q(\Omega)$ là $D^\alpha f$ chính quy và là một hàm trong $L^q(\Omega)$, khi đó ta viết

$$\left\| D^\alpha f \right\|_q < \infty.$$

Tương tự, $Df \in L^q(\Omega)$ với D thỏa mãn (1.1) là chính quy.

Ta xét không gian tương ứng cho trường vectơ. Giả sử $m \in \mathbb{N}$ và

$$C_0^\infty(\Omega)^m := \left\{ (\varphi_1,...,\varphi_m), \quad \varphi_j \in C_0^\infty(\Omega), \quad j = 1,...,m \right\}$$

là không gian hàm thử có giá trị vectơ $\varphi = (\varphi_1,...,\varphi_m)$ được trang bị tôpô tương ứng.

Với mỗi $F = (F_1,...,F_m)$, $F_j \in C_0^\infty(\Omega)'$, $j = 1,...,m$ ta định nghĩa hàm

$$F: \quad \varphi \mapsto [F,\alpha], \quad \varphi = (\varphi_1,...,\varphi_m) \in C_0^\infty(\Omega)^m$$

bởi

$$[F,\alpha] = [F,\alpha]_\Omega := [F_1,\varphi_1] + ... + [F_1,\varphi_m].$$

Ta ký hiệu

$$C_0^\infty(\Omega)'^m = C_0^\infty(\Omega)^{m\prime} = \left\{ (F_1,...,F_m); F_j \in C_0^\infty(\Omega)', j = 1,...,m \right\}$$

là không gian suy rộng của không gian thử $C_0^\infty(\Omega)^m$.

Giả sử $f \in L^1_{loc}(\Omega)^m$ và $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ thì $f = (f_1,..., f_m)$ xác định hàm suy rộng

$$\varphi \mapsto [f,\varphi] = \langle f,\varphi\rangle = \int_\Omega f.\varphi dx$$

trong đó $f.\varphi = f_1\varphi_1 + ... + f_m\varphi_m, \varphi = (\varphi_1,...,\varphi_m) \in C_0^\infty(\Omega)^m$. Khi đó ta có phép nhúng

$$L^1_{loc}(\Omega)^m \subseteq C_0^\infty(\Omega)^{m\prime}.$$

Để xác định nghiệm yếu của phương trình Navier – Stokes ta xét không gian con của hàm thử không phân kỳ